

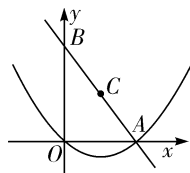


1. 如图,已知直线  $y = -\frac{4}{3}x + 8$  与  $x$  轴交于点  $A$ ,与  $y$  轴交于点  $B$ ,  $C$  是线段  $AB$  的中点,抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a > 0$ ) 过  $O$ 、 $A$  两点,且其顶点的纵坐标为  $-\frac{4}{3}$ .

(1) 分别写出  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三点的坐标;

(2) 求抛物线的函数解析式;

(3) 在抛物线上是否存在点  $P$ ,使得以  $O$ 、 $P$ 、 $B$ 、 $C$  为顶点的四边形是菱形? 若存在,求所有满足条件的点  $P$  的坐标;若不存在,请说明理由.



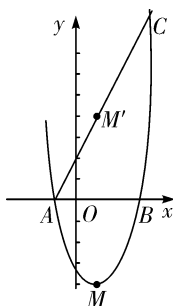
第 1 题图

2. (2015 毕节) 如图,抛物线  $y = x^2 + bx + c$  与  $x$  轴交于  $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$  两点,顶点  $M$  关于  $x$  轴的对称点是  $M'$ .

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 若直线  $AM'$  与此抛物线的另一个交点为  $C$ ,求  $\triangle CAB$  的面积;

(3) 是否存在过  $A$ 、 $B$  两点的抛物线,其顶点  $P$  关于  $x$  轴的对称点为  $Q$ ,使得四边形  $APBQ$  为正方形? 若存在,求出此抛物线的解析式;若不存在,请说明理由.



第 2 题图

## 参考答案

1. 解:(1)  $\because$  直线  $y = -\frac{4}{3}x + 8$  与  $x$  轴交于点  $A$ ,与  $y$  轴交于点  $B$ ,  $\therefore$  令  $y = -\frac{4}{3}x + 8 = 0$ ,  $x = 6$ , 即  $A(6, 0)$ ,

$\therefore$  令  $x = 0$ ,  $y = 0 + 8 = 8$ , 即  $B(0, 8)$ .

$\because C$  是线段  $AB$  的中点,  $\frac{6+0}{2} = 3$ ,  $\frac{0+8}{2} = 4$ ,

$\therefore A(6, 0)$ 、 $B(0, 8)$ 、 $C(3, 4)$ ;

(2)  $\because$  抛物线经过点  $O(0, 0)$ 、点  $A(6, 0)$ , 顶点的纵坐标为  $-\frac{4}{3}$ ,

$\therefore$  其顶点坐标为  $(3, -\frac{4}{3})$ ,

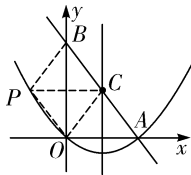
$$\therefore \begin{cases} c=0 \\ 36a+6b+c=0 \\ 9a+3b+c=-\frac{4}{3} \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a=\frac{4}{27} \\ b=-\frac{8}{9} \\ c=0 \end{cases},$$

$\therefore$  抛物线的函数解析式为  $y = \frac{4}{27}x^2 - \frac{8}{9}x$ ;

(3) 存在点  $P$ , 使以  $O$ 、 $P$ 、 $B$ 、 $C$  为顶点的四边形是菱形,

$\because \angle AOB = 90^\circ$ ,  $A(6, 0)$ 、 $B(0, 8)$ ,

$\therefore AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ ,



第 1 题解图

$\because C$  是  $AB$  的中点,

$$\therefore OC = \frac{1}{2}AB = BC = 5,$$

$$\because OB = 8,$$

$$\therefore OB > OC, \text{ 且 } OB > BC,$$

$\therefore$  当以  $O, P, B, C$  为顶点的四边形是菱形时,  $OB$  是菱形的对角线,

连接  $PC$ , 如解图, 则  $OB$  是  $PC$  的垂直平分线,

$\therefore$  点  $P$  与点  $C$  关于直线  $OB$  对称, 即  $P$  与  $C$  关于  $y$  轴对称,

$$\because C(3, 4),$$

$$\therefore P(-3, 4),$$

把点  $P(-3, 4)$  代入抛物线解析式  $y = \frac{4}{27}x^2 - \frac{8}{9}x$  中,

$$\text{当 } x = -3 \text{ 时, } y = \frac{4}{27} \times (-3)^2 - \frac{8}{9} \times (-3) = 4,$$

$\therefore$  点  $P(-3, 4)$  在抛物线上.

故在抛物线上存在点  $P$ , 使以  $O, P, B, C$  为顶点的四边形是菱形, 点  $P$  的坐标是  $(-3, 4)$ .

2. 解: (1)  $\because$  抛物线与  $x$  轴交于点  $A(-1, 0), B(3, 0)$ ,

$$\therefore y = (x+1)(x-3) = x^2 - 2x - 3.$$

$$(2) \because \text{抛物线 } y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4,$$

$\therefore$  点  $M$  的坐标为  $(1, -4)$ .

$\because M$  与  $M'$  关于  $x$  轴对称,

$\therefore$  点  $M'$  的坐标为  $(1, 4)$ ,

设直线  $AM'$  的解析式为  $y = kx + m$ ,

将点  $A(-1, 0)$ , 点  $M'(1, 4)$  代入得

$$\begin{cases} -k + m = 0 \\ k + m = 4 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k = 2 \\ m = 2 \end{cases},$$

$\therefore$  直线  $AM'$  的解析式为  $y = 2x + 2$ ,

$$\text{与抛物线 } y = x^2 - 2x - 3 \text{ 联立得 } \begin{cases} y = 2x + 2 \\ y = x^2 - 2x - 3 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = 0 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 5 \\ y_2 = 12 \end{cases},$$

$\therefore$  点  $C$  的坐标为  $(5, 12)$ ,

又  $\because AB = 4$ ,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 4 \times 12 = 24.$$

(3) 存在.

理由如下: 如解图,

$\because$  四边形  $APBQ$  是正方形,

$\therefore PQ$  垂直且平分  $AB$ ,  $AB$  垂直且平分  $PQ$ , 且  $PQ = AB$ ,

设  $PQ$  与  $x$  轴交点为  $N$ , 则  $PN = \frac{1}{2}AB = 2$ ,

$\therefore$  点  $P$  的坐标为  $(1, 2)$  或  $(1, -2)$ .

设过  $A, B$  两点的抛物线的解析式为  $y = a(x+1)(x-3)$ ,

$$\text{将点 } (1, 2) \text{ 代入得 } a = -\frac{1}{2},$$

$$\text{此时抛物线解析式为 } y = -\frac{1}{2}(x+1)(x-3) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2};$$

$$\text{将点 } (1, -2) \text{ 代入得 } a = \frac{1}{2},$$

$$\text{此时抛物线解析式为 } y = \frac{1}{2}(x+1)(x-3) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}.$$

综上, 存在这样的抛物线 2 条, 其解析式为  $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$  或  $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$ .



第 2 题解图